

Майер Р.В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАОСА НА ПЭВМ

robert_maier@mail.ru

Глазовский государственный педагогический институт

г. Глазов

Рассмотрена методика изучения хаотического движения, предусматривающая использование компьютерных моделей анализируемых систем. Предложены компьютерные программы, моделирующие бильярд Синная, маятник Даффинга, странные аттракторы Реслера и Лоренца, позволяющие получить сечение Пуанкаре и изучить перемешивание фазового пространства.

Chaotic motion study methodology using computer models of systems being analyzed has been considered. Computer software modelling scattering billiards, Duffing pendulum, Roessler and Lorenz strange attractors and permitting to obtain Poincare section and study mixing of phase space have been suggested.

Известно большое количество систем, обнаруживающей способность к хаотическому движению. Классическим примером является маятник Даффинга, представляющий собой шарик внутри потенциальной ямы с двумя углублениями. Под действием внешней периодически изменяющейся силы шарик совершает хаотические колебания. Другой пример — бильярд Синная: горизонтально расположенный ящик с изогнутыми стенками и препятствиями внутри. По дну ящика движется шарик, который сталкиваясь с препятствиями и стенками, перемещается по непредсказуемой траектории.

Часто переход в хаотический режим происходит по сценарию Фейгенбаума: при монотонном изменении бифуркационного параметра происходит последовательность бифуркаций удвоения периода. Это приводит к появлению новых кратных гармоник в спектре периодически изменяющихся величин, спектр становится практически сплошным. Другой сценарий – переход к хаосу через перемежаемость: на колебательную систему периодически воздействуют с помощью коротких импульсов силы, выводя ее из состояния равновесия. Система совершает сложное движение, каждый раз возвращаясь в установившийся режим.

При движении системы с n степенями свободы точка в фазовом $2n$ -мерном пространстве выписывает сложную кривую. Сечением Пуанкаре называется множество точек пересечения фазовой кривой с некоторой плоскостью α . Возможны следующие варианты:

1. периодическое движение: фазовая кривая последовательно проходит через конечное множество точек сечения: сначала через точку A , затем через B , через C , затем снова через точку A и т.д.;
2. квазипериодическое движение: фазовая кривая пересекает плоскость α в точках, образующих некоторую непрерывную линию, например окружность;

3. нерегулярное или хаотическое движение: множество точек на плоскости α расположено случайно и фрактальную структуру. В последнем случае траектория хаотически блуждает по фазовому пространству.

Необходимым и достаточным условием хаотичности движения является перемешивание – такое изменение формы ячейки фазового пространства, соответствующей движению ансамбля систем, что эта ячейка как бы однородно перемешивается во всем фазовом пространстве. Она превращается в тонкую паутинку, нити которой пронизывают все пространство, сохраняя при этом свой объем.

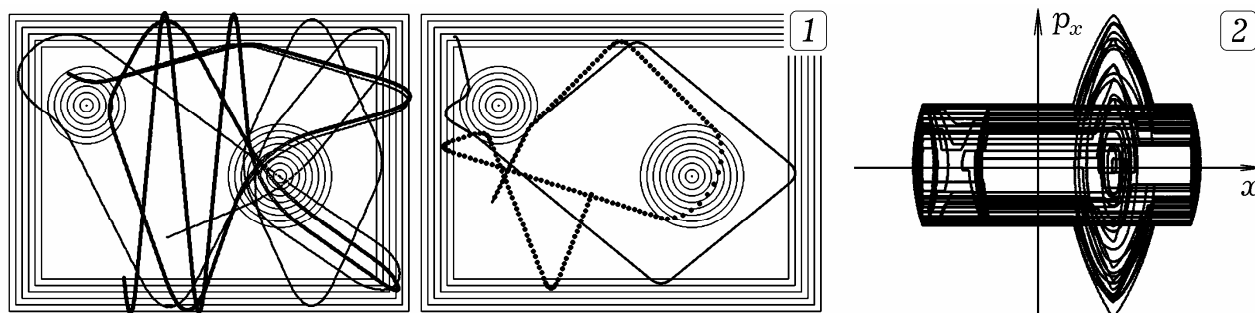


Рис. 1.

Задача 1. Исследуйте хаотическое движение шарика в бильярде Синная прямоугольной формы, имеющем наклонные стенки, конические выступ и углубление в центре. Что произойдет с траекторией шарика при изменении его скорости на 1–2 %?

При движении шарика по коническому выступу, вершина A которого имеет координаты (x_0, y_0) , на него действует постоянная по модулю сила, направленная от A . Ее проекции на оси равны: $F_x = F \cos \alpha = F(x_0 - x)/l$, $F_y = F \sin \alpha = F(y_0 - y)/l$, где $l = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ — расстояние от шарика до вершины A . Если шарик движется по коническому углублению, то проекции силы вычисляются по аналогичным формулам, отличающимся знаком. При приближении к горизонтальной или вертикальной стенки на шарик действует постоянная сила, направленная соответственно вертикально или горизонтально внутрь бильярда. Текст программы, строящей траекторию (рис. 1.1) и фазовую кривую в осях x и p_x (рис. 1.2), представлен ниже.

Небольшие изменения начальных условий приводят к тому, что шарик движется по совершенно иной траектории. На рис. 1.1 показан результат моделирования движения двух шариков в случае, они имеют одинаковые начальные координаты, а их скорости отличаются на 1 %.

```
uses dos, crt, graph; const dt=0.01; time=55000; {Borland Pascal}
var m,Fx,Fy,x,y,vx,vy,xx,yy,x1,y1,x2,y2 : real;
Gd,Gm,i,j,t : integer; ax,ay,F,F1,F2,l1,l2 : real;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
x1:=130; y1:=150; x2:=430; y2:=260; rectangle(60,60,580,420);
```

```

circle(round(x1),round(y1),60); circle(round(x2),round(y2),80);
m:=0.1; x:=120; y:=300; vx:=20; vy:=-40;
Repeat t:=t+1; Fx:=0; Fy:=0; F1:=0; F2:=0;
l1:=sqrt(sqr(x1-x)+sqr(y1-y)); l2:=sqrt(sqr(x2-x)+sqr(y2-y));
if l1<60 then F1:=-6; if l2<80 then F2:=8;
if x<60 then Fx:=6; if x>580 then Fx:=-6;
if y<60 then Fy:=6; if y>420 then Fy:=-6;
Fx:=Fx+F1*(x1-x)/l1+F2*(x2-x)/l2; Fy:=Fy+F1*(y1-y)/l1+F2*(y2-y)/l2;
ax:=Fx/m; ay:=Fy/m; xx:=x; yy:=y; vx:=vx+ax*dt; vy:=vy+ay*dt;
x:=x+vx*dt; y:=y+vy*dt; delay(50);
if round(t/20)*20=t then circle(round(x),round(y),3);
{ circle(50+round(0.8*x),240-round(2*vx),1); }
until (t>time)or(KeyPressed);
Repeat until keypressed; CloseGraph;
END.

```

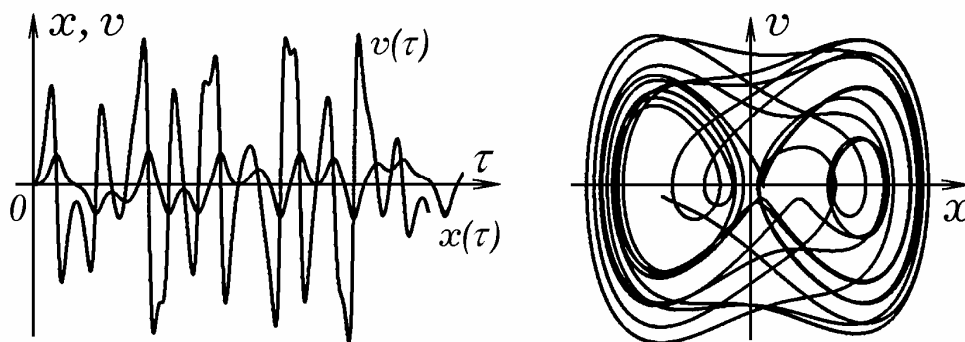


Рис. 2.

Задача 2. Промоделируйте вынужденные колебания маятника Дафинга, описываемые уравнением: $m\ddot{x} + r\dot{x} + k(x^3 - x) = F_m \cos \omega \tau$.

Рассмотрим колебания шарика внутри потенциальной ямы с двумя углублениями под действием внешней периодически изменяющейся силы $F(\tau) = F_m \cos(\omega \tau)$. Пусть потенциальная энергия внутри ямы задается функцией $U(x) = 0,25x^4 - 0,5x^2$. Потенциальное поле создает возвращающую силу $F = -\partial U / \partial x = -x^3 + x$. Получаем дифференциальное уравнение колебаний Дафинга: $m\ddot{x} + r\dot{x} + k(x^3 - x) = F_m \cos \omega \tau$. Вариант решения задачи представлен на рис. 2. Из графиков $x(\tau)$ и $v(\tau)$ и фазовой кривой видно, что система совершает нерегулярные стохастические колебания относительно двух положений равновесия. Движение шарика является трудно предсказуемым, бесконечно малые изменения параметров системы, начальных условий и внешней силы приводят к тому, что система эволюционирует по иному пути.

Задача 3. Получите сечения Пуанкаре для маятника Дафинга.

Результаты вычислений приведены на рис. 3. Сечения Пуанкаре для маятника Дафинга получены так: на ЭВМ моделируются колебания системы и определяются ее состояния в моменты времени, когда фаза вынуждающей

силы α равна $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$. Так как режим хаотический, точки сечения имеют фрактальную структуру. Программа представлена ниже.

```
uses crt, graph; {Borland Pascal}
const m = 1; k = 4; r = 0.5; w = 2.3; dt = 0.002; pi = 3.1415926;
var Gd, Gm : integer; f, t, x, v, a, z, zz : real;
BEGIN x:= 0; v:= 0;
Gd := Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
line(200,0,200,480); line(0,280,640,280);
Repeat t:= t + dt; f:=1*sin(w*t);
a:=(f-k*(x*x*x-x)-r*v)/m; v:=v+a*dt; x:=x+v*dt; z:=sin(w*t+3*pi/4);
IF (z>0)and(zz<0) THEN circle(round(100*x) + 200, 280 - round(100*v),1);
zz:= z; until (t>10000); Repeat until KeyPressed; CloseGraph;
END.
```

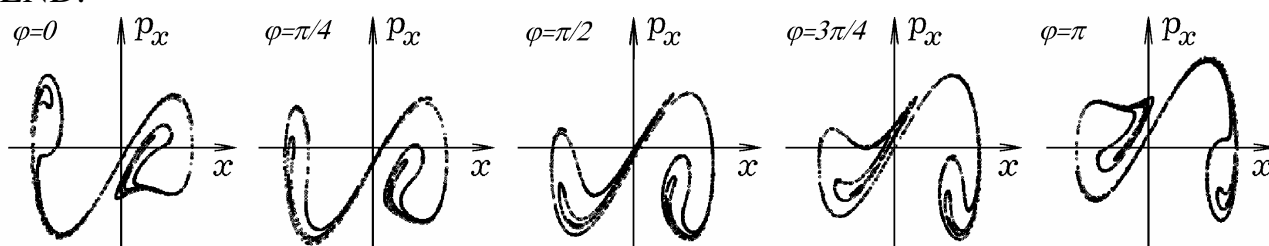


Рис. 3.

Задача 4. Имеется совокупность одномерных потенциальных ям, профиль которых описывается функцией $U(x) = -a \cos(bx)$. Внутри одной из них лежит шарик, на который периодически действует кратковременная сила то в одну сторону, то в другую сторону. На шарик также действует сила вязкого трения. Исследуйте возникающие хаотические колебания системы.

Со стороны силового поля с потенциальной энергией $U(x) = -a \cos(bx)$ на шарик действует сила $F_x = -\partial U / \partial x = -ab \sin(bx)$. Движение шарика описывается дифференциальным уравнением: $m\ddot{x} + r\dot{x} + ab \sin(bx) = F(t)$. Получающиеся график колебаний и фазовая кривая изображены на рис. 4. Видно, что при соответствующем подборе величины и длительности импульса силы шарик в случае совпадения направления движения с направлением силы перескакивает из одной потенциальной ямы в другую. Если скорость шарика и направление силы не совпадают, то шарик может не перескочить в другую яму.

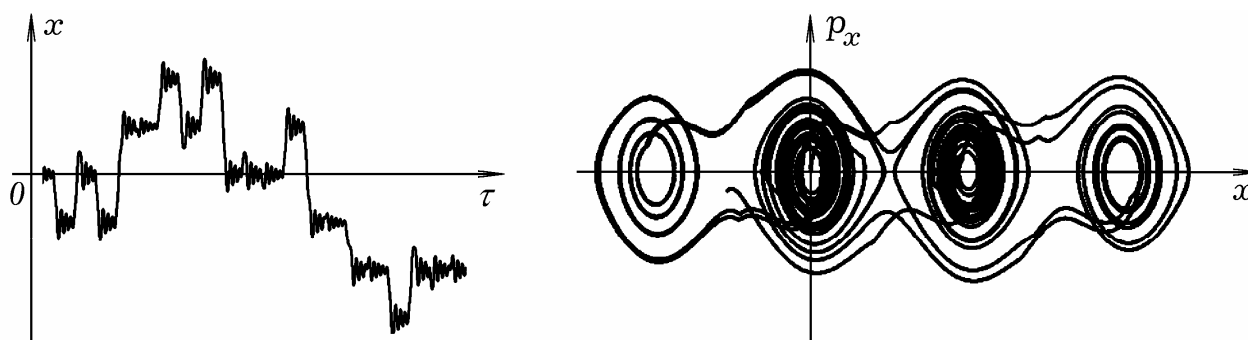


Рис. 4.

Задача 5. Промоделируйте переход к хаосу через перемежаемость в случае, когда на маятник Давинга периодически действует кратковременная сила. Постройте график колебаний и фазовую кривую.

Задача 6. Исследуйте странный аттрактор Реслера, задаваемый системой уравнений: $\dot{x} = -(y+z)$, $\dot{y} = x + y/5$, $\dot{z} = 1/5 + z(x-m)$.

Используемая программа состоит из цикла по времени, в котором рассчитываются значения x , y , z в следующий момент $\tau + \Delta\tau$:

$$\Delta x = -(y^t + z^t)\Delta\tau, \Delta y = (x^t + y^t/5)\Delta\tau, \Delta z = (0,2 + z^t(x^t - m))\Delta\tau, \\ x^{t+1} = x^t + \Delta x, y^{t+1} = y^t + \Delta y, z^{t+1} = z^t + \Delta z.$$

Получающиеся графики в системе координат xOy при различных значениях бифуркационного параметра m изображены на рис. 5. Видно, что происходят бифуркации удвоения периода, приводящие к хаотическим колебаниям, фазовая кривая которых имеет фрактальную структуру.

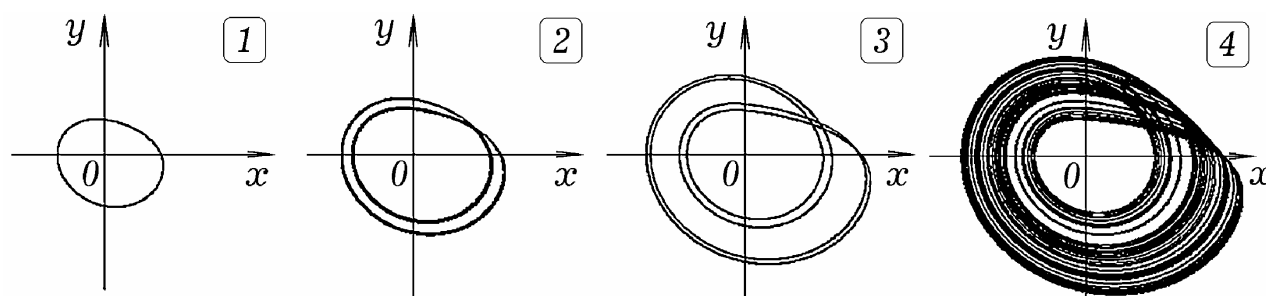


Рис. 5.

Задача 7. Промоделируйте странный аттрактор Лоренца, уравнения которого имеют вид: $\dot{x} = a(-x+y)$, $\dot{y} = bx - y - xz$, $\dot{z} = -cz + xy$.

Конечно-разностные уравнения выглядят так:

$$\Delta x = a(-x^t + y^t)\Delta\tau, \Delta y = (bx^t - y^t - x^t z^t)\Delta\tau, \Delta z = (-cz^t + x^t y^t)\Delta\tau, \\ x^{t+1} = x^t + \Delta x, y^{t+1} = y^t + \Delta y, z^{t+1} = z^t + \Delta z.$$

Используемая программа представлена ниже.

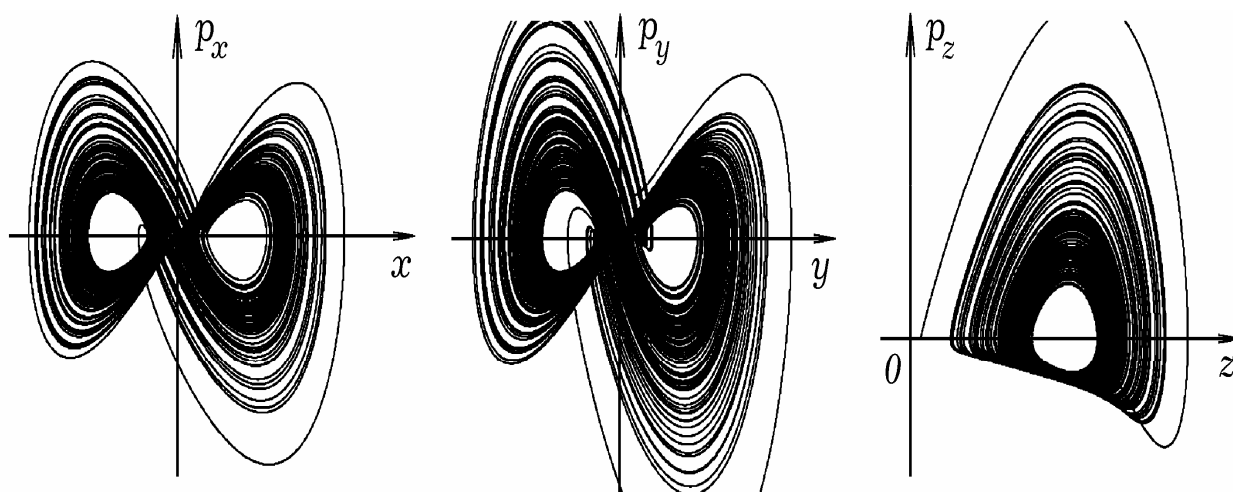


Рис. 6.

Получающиеся фазовые кривые изображены на рис. 6. Система эволюционирует так, что фазовая кривая описывает закрученную восьмерку, захватывая две большие области фазового пространства. В той части фазового пространства, где фазовые кривые проходят рядом друг с другом движение системы неустойчиво: малые изменения ее состояния приводят к тому, что она эволюционирует совершенно по другому пути.

```
uses crt, graph; {Borland Pascal}
const a=15; b=30; c=2.2; dt=0.0001;
var Gd, Gm: integer;
zz, zzz, t, x, y, z, dx, dy, dz, vx, vy, vz: real;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
x:=20; y:=20; z:=5;
Repeat t:=t+dt; dx:=a*(-x+y)*dt; x:=x+dx; vx:=dx/dt;
dy:=(b*x-y-x*z)*dt; y:=y+dy; vy:=dy/dt;
dz:=(-c*z+x*y)*dt; z:=z+dz; vz:=dz/dt;
putpixel(220+round(10*x), 220-round(1*vz), 15);
{putpixel(220+round(10*y), 220-round(1*vy), 15);}
{putpixel(100+round(10*z), 220-round(1*vz), 15);}
until KeyPressed; CloseGraph;
END.
```

Задача 8. Про моделируйте перемешивание фазового объема в случае свободных незатухающих колебаний маятника Дафинга.

Представим себе совокупность одинаковых маятников Дафинга, совершающих свободные незатухающие колебания, описываемые уравнением $m\ddot{x} + (x^3 - x) = 0$, отличающиеся только начальными условиями x_0 , p_0 . Пусть в момент $\tau = 0$ фазовые точки, характеризующие начальное состояние маятников, находятся внутри прямоугольника $[x, x + \Delta x, p_x, p_x + \Delta p_x]$. Предлагаемая программа рассчитывает состояние каждого маятника в момент времени τ_1 , и ставит соответствующую точку на фазовой

плоскости. Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 7. Видно, что происходит расползание фазового объема, его перемешивания в фазовом пространстве, что свидетельствует о хаотичности колебаний.

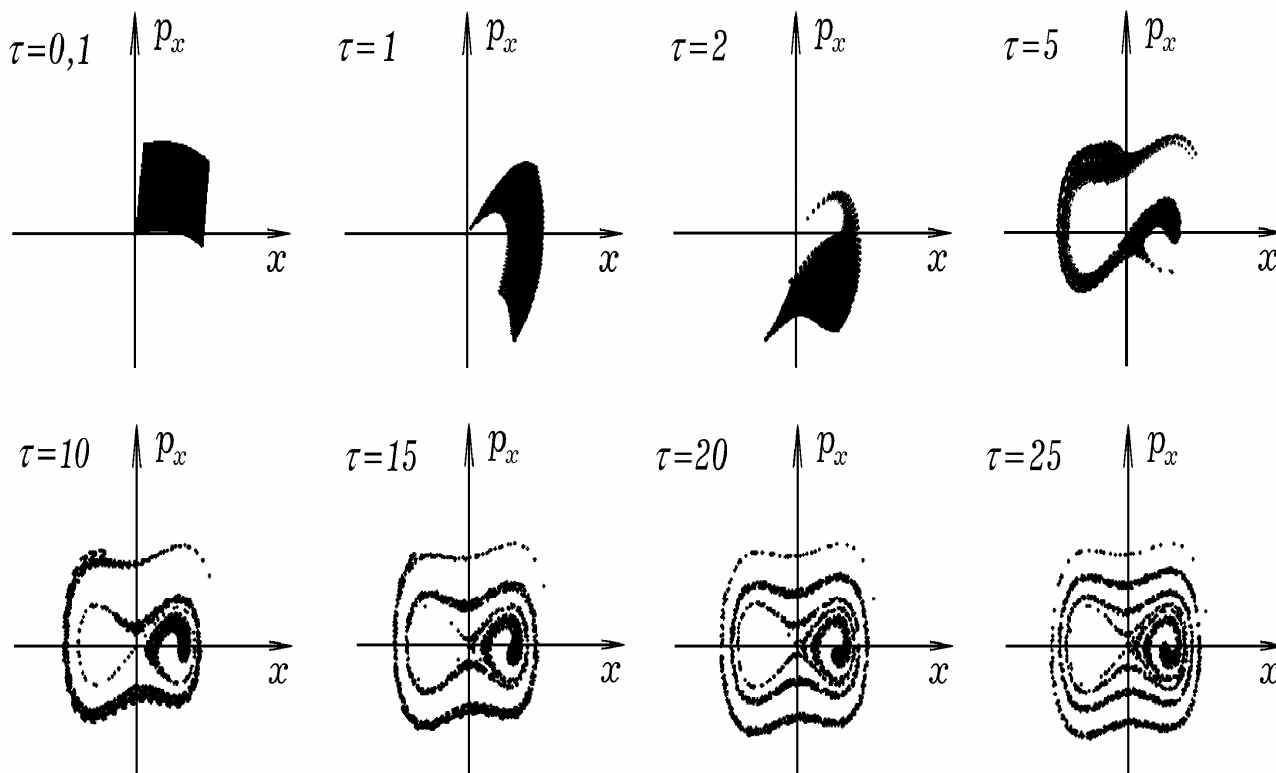


Рис. 7.

Задача 9. Изучите хаотическое движение шарика, подпрыгивающего на вибрирующей пластине в однородном поле тяжести. Постройте график колебаний и фазовую кривую. Получите сечение Пуанкаре.

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966. – 724 с.
2. Сайт: <http://maier-rv.glazov.net> (электронный ресурс).